トロピカル有理関数の最小体積表示

広島大学　大学院先進理工系科学研究科　数学プログラム
助永真之 (Masayuki SUKENAGA) *

概 要

$\mathbb{R}^n$ 上のトロピカル有理関数 φ とは、トロピカル多項式 f と g を用いて $\varphi = f \oslash g$ と表すことができるもののことである。トロピカル多項式に関する双対定理をトロピカル有理関数に対して拡張し、組 (f, g) の体積を定義する。$n = 1$ のとき、$\varphi(x) = f(x) \oslash g(x)$ を満たす組 (f, g) の中で体積が最小のものが存在し、$f(x) \oplus (y \odot g(x))$ の双対分割は平行移動を除いて一意であることを示す。また、$n = 2$ のときは体積最小の表示が一意ではない例があることも紹介する。

1　導入

$\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\oplus = \max$, $\odot = +$ の三つ組 $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ をトロピカル代数という。ただし、$-\infty$ に関する演算は、$x \in \mathbb{T}$ に対して $x \oplus -\infty = -\infty \oplus x = x$, $x \odot -\infty = -\infty \odot x = -\infty$ と定める。これは体の公理のうち「加法に関する逆元の存在」以外をすべて満たしており、半体と呼ばれる。$-\infty$ が加法 $\oplus$ に関する単位元（零元）であり、$0 \in \mathbb{R}$ が乗法 $\odot$ に関する単位元であることに注意する。$a, b \in \mathbb{T}$ $(b \neq -\infty)$ に対して $a \oslash b := a - b$ と定めると、これがトロピカル代数における割り算になる。

トロピカル代数に基づく幾何学をトロピカル幾何学という。ここでは、トロピカル多項式から定まるトロピカル超曲面というものが基本的な対象である。トロピカル多項式から定まる格子多面体的複体とトロピカル超曲面の間には双対性があり、トロピカル多様体に関する情報を組み合わせ論的に調べることができる。少しだけ代数幾何との関連を述べておくことにする。k を体とするとき、次を満たす写像 $v\colon k \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を k 上の付値という：

- $v(a + b) \geq \min(v(a), v(b))$,
- $v(ab) = v(a) + v(b)$,
- $v(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$.

これを -1 倍した $-v$ を考えると、加法が $\max$ に関係し、乗法が通常の和に対応していることがわかる。また、加法の単位元 0 は $-\infty$ に対応している。このように見ると、付値はトロピカル代数と関連するものだと納得していただけると思う。代数多様体とは、体上の有限個の多項式の共通零点となっているもののことである。付値体上の代数多様体 X が与えられたとき、X の各点の付値をとり、-1 を掛けて通常の閉包をとる操作をトロピカル化という。X をトロピカル化することで、トロピカル多様体が得られるので、代数多様体に関する情報を組み合わせ論的に得る

*E-mail: sukenaga@hiroshima-u.ac.jp

ことができることがある。今回の話ではトロピカル化は出てこないが、こういった観点からのトロピカル幾何学の研究も行われている。

トロピカル多項式の説明に戻る。$\mathbb{T}$ に係数 $c_{\mathbf{i}}$ を持つ和 $\bigoplus_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{i}}\mathbf{x}^{\mathbf{i}}$ を n 変数トロピカル（ローラン）多項式という。ここで、$\mathbf{i}=(i_1,\ldots,i_n)$ に対して $\mathbf{x}^{\mathbf{i}}:=x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$ であり、係数 $c_{\mathbf{i}}\in\mathbb{T}$ は有限個を除いて $-\infty$ である。（通常の体上の多項式の係数は有限個を除いて 0 でないことに対応していると考えるとよい。トロピカル代数における零元は $-\infty$ であった。）トロピカル多項式 $f=\bigoplus_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{i}}\mathbf{x}^{\mathbf{i}}$ は次のように関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{T}$ を定める：

$$(t_1,\ldots,t_n)\mapsto \max_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{Z}^n}\left(c_{(i_1,\ldots,i_n)}+i_1t_1+\cdots+i_nt_n\right).$$

これは通常の多項式における代入と同じ操作である。つまり、まず各項に $(t_1,\ldots,t_n)$ を代入したものをトロピカルの意味で掛け（すなわち通常の足し算をする）、次にそれらをトロピカルの意味で足しあげる（最大値を取る）操作になっている。

$\mathbb{R}^n$ 上のトロピカル有理関数とは、トロピカル多項式の組 $f,\,g$（ただし、$g\neq-\infty$）を用いて $f\oslash g\ (=f-g)$ と表せる関数である。[5] において、トロピカル多項式に対する単項式複雑度と、有限個のトロピカル多項式の列に対する分解複雑度というものが考察されている。彼らはトロピカル多項式の組全体の集合の上に $\leq_{\mathrm{mComp}}$ という前順序を

$$(f_1,g_1)\leq_{\mathrm{mComp}}(f_2,g_2)\ :\Leftrightarrow\ \begin{cases}\mathrm{mComp}(f_1)\leq\mathrm{mComp}(f_2)\\ \text{かつ }\mathrm{mComp}(g_1)\leq\mathrm{mComp}(g_2)\end{cases}$$

と定めた。ここで、mComp はトロピカル多項式の（単項式）複雑度を測る関数であり、$\mathrm{mComp}(f)$ は $\mathbb{R}^n\setminus V(f)$ ($V(f)$ は f の定めるトロピカル平面曲線というもの) の連結成分の個数と定義される。彼らはこの前順序において小さな組を見つける方法を考察したのだが、比較不能なペアが数多く存在するという問題があった。そこで、私はトロピカル有理関数に関する双対定理を示し、それを用いてトロピカル多項式の組に対して体積を定義することにより、全てのペアを比較可能にした。一変数のトロピカル有理関数 $\varphi(x)$ を考えたとき、$\varphi(x)=f(x)\oslash g(x)$ を満たす組 (f,g) の中で体積が最小のものに対して、$f(x)\oplus(y\odot g(x))$ の双対分割は平行移動を除いて一意であることを示した。しかし、二変数のときは体積最小の表示が一意ではない例が存在することを示した。

2 トロピカル有理関数と体積

n 変数トロピカル多項式全体の集合を $\mathbb{T}[x_1^{\pm1},\ldots,x_n^{\pm1}]$ と書く。$f=\bigoplus_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{i}}\mathbf{x}^{\mathbf{i}}\in\mathbb{T}[x_1^{\pm1},\ldots,x_n^{\pm1}]$ とする。ある $\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^n$ $(\mathbf{i}\neq\mathbf{j})$ に対して、$c_{\mathbf{i}}\mathbf{x}^{\mathbf{i}}(P)=c_{\mathbf{j}}\mathbf{x}^{\mathbf{j}}(P)=f(P)$ が成り立つような点 $P\in\mathbb{R}^n$ 全体の集合を f の定めるトロピカル超曲面といい、$V(f)$ と書く。特に、二変数トロピカル多項式の定めるトロピカル超曲面で空集合でも $\mathbb{R}^2$ でもないものをトロピカル平面曲線という。通常の代数幾何では多項式 f の零点集合は $V(f)=\{(p_1,\ldots,p_n)\in k^n\mid f(p_1,\ldots,p_n)=0\}$ である。トロピカルの世界で零点集合（トロピカル超曲面のこと）をなぜ上のように定めるのかうまい説明を思いつかないが、付値を用いたトロピカル化との関係を考えるときにはこう定義しておくと色々うまくいくのである。

Definition 2.1 (双対分割, [3, Definition 3.10]). $f=\bigoplus_{\mathbf{i}} c_{\mathbf{i}}x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$ をトロピカル多項式とする。集合 $\{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^n\mid c_{\mathbf{i}}\neq-\infty\}$ の凸包をニュートン多面体といい、$\mathrm{Newt}(f)\subset\mathbb{R}^n$ と書く。$\Delta_f^{\uparrow}\subset\mathbb{R}^{n+1}$ を次の集合の凸包と定める：

$$\{(\mathbf{i},\alpha)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{R}\ \mid\alpha\leq c_{\mathbf{i}}\}.$$

$\Delta_f^{\uparrow}$ の有界な面を $\mathbb{R}^n$ に射影することで、Newt(f) の分割が得られる。これを f の双対分割といい、Δ_f と書く。

トロピカル超曲面に関する双対定理というものがあるのだが、ここではトロピカル平面曲線 $V(f)$ に関する双対性の例を見る。Newt(f) に含まれる格子点 (i,j) に、対応する f の係数 $c_{i,j}$ を高さとする（z 軸の負の方向に無限に延びる）ポールを立て（ただし係数が $-\infty$ の所にはポールはない)、それらの凸包をとると $\Delta_f^{\uparrow}$ が得られる（テントを張るイメージ)。

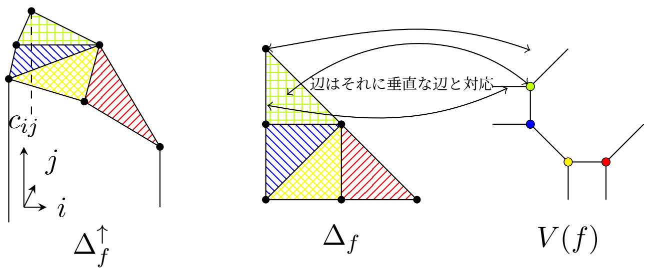

図 1: $f = x^2 \oplus 4xy \oplus 4y^2 \oplus 2x \oplus 4y \oplus 3$ に関する双対.

図 1 のように、トロピカル多項式 f の係数から f のニュートン多面体 Newt(f) の分割 Δ_f が得られ、これと $V(f)$ が双対になる。Δ_f の 2 次元 cell が $V(f)$ の頂点に対応し、Δ_f の 1 次元 cell が $V(f)$ の辺に対応している。Δ_f から $V(f)$ の概形が復元できる。この双対性により、トロピカル多様体を組み合わせ論的に調べることができる。また、双対定理を用いてトロピカル平面曲線の各辺に重みをつける。

Definition 2.2. $V(f)$ をトロピカル平面曲線とし、σ をその辺とする。σ の重み w_σ を双対分割 Δ_f において対応する 1 次元 cell の格子長と定める。

これ以降、トロピカル平面曲線と書いたら各辺に重みがついているものとする。重みをつけることでトロピカル平面曲線はバランス条件というものを満たすことが知られている。

$\mathbb{R}^n$ 上のトロピカル有理関数 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}$ とは、n 変数トロピカル多項式 f と $g \neq -\infty$ を用いて $\varphi = f \oslash g$ と表すことができるものであった。組 (f,g) の体積を Newt$(f \oplus (x_{n+1} \odot g))$ の体積と定義するのだが、その理由は次のトロピカル有理関数に関する双対定理にある。

Theorem 2.3 (トロピカル有理関数に関する双対定理)**.** φ をトロピカル有理関数とし、$f \in \mathbb{T}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ と $g \in \mathbb{T}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}] \setminus \{-\infty\}$ を $\varphi = f \oslash g$ を満たすトロピカル多項式とする。このとき、次が成り立つ：

$$\begin{aligned} V(f \oplus (x_{n+1} \odot g)) &= \{(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \varphi(\mathbf{x}) \neq -\infty\} \\ &\quad \cup \{(\mathbf{x}, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in V(f), x_{n+1} < \varphi(\mathbf{x})\} \\ &\quad \cup \{(\mathbf{x}, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in V(g), x_{n+1} > \varphi(\mathbf{x})\}. \end{aligned}$$

右辺の一つ目の集合が φ のグラフとなっている。例は図 2 を参照していただきたい。証明が明示された文献が見当たらなかったため [4] でこの定理の証明を与えたが、トロピカル幾何の専門家にとってはよく知られている事実であると思われる。通常の代数幾何では、有理関数 f/g のグラフは $f - x_{n+1}g$ の零点集合である。上の定理は、トロピカル有理関数 $f \oslash g$ はある意味で、一変数追加したトロピカル多項式 $f \oplus (x_{n+1} \odot g)$ の双対分割 $\Delta_{f \oplus (x_{n+1} \odot g)}$ に双対であるということを言っている。

Definition 2.4. $f, g \in \mathbb{T}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ をトロピカル多項式とする。$\mathrm{Newt}(f \oplus (x_{n+1} \odot g))$ のアフィンスパンの次元が $n+1$ より真に小さいとき、$\mathrm{vol}(f,g) = 0$ と定め、$\mathrm{Newt}(f \oplus (x_{n+1} \odot g))$ のアフィンスパンの次元が $n+1$ のとき、$\mathrm{vol}(f,g)$ を $\mathrm{Newt}(f \oplus (x_{n+1} \odot g))$ の体積と定める。組 (f,g) の体積を $\mathrm{vol}(f,g)$ と定義する。

ここで、$\mathrm{Newt}(f \oplus (x_{n+1} \odot g))$ に含まれる格子点の数は $\mathrm{Newt}(f)$ と $\mathrm{Newt}(g)$ に含まれる格子点の数の和に等しい。$\mathrm{Newt}(f \oplus (x_{n+1} \odot g))$ の体積が小さいほど、$\mathrm{Newt}(f \oplus (x_{n+1} \odot g))$ に含まれる格子点の数は少ない傾向にあり、結果として $\mathrm{Newt}(f)$ と $\mathrm{Newt}(g)$ に含まれる格子点の数や f と g の単項式複雑度も小さくなる傾向があることに注意しておく。

トロピカル有理関数と体積の例を見る。一変数トロピカル多項式 $f_1(x) = x \oplus 0$, $g_1(x) = x \oplus 1$ を用いて、$\varphi(x) = f_1(x) \oslash g_1(x)$ と表せるトロピカル有理関数 $\varphi(x)$ を考える。関数 $\varphi(x)$ は $f_2(x) = (-2)x^2 \oplus x \oplus 0$, $g_2(x) = (-2)x^2 \oplus x \oplus 1$ を用いて $\varphi(x) = f_2(x) \oslash g_2(x)$ と表すこともできる。組 (f_1, g_1) の体積 $\mathrm{vol}(f_1, g_1)$ は $f_1 \oplus (y \odot g_1)$ の Newton 多角形の面積であり、1 である（図 2 参照）。一方、$\mathrm{vol}(f_2, g_2) = 2$ である。

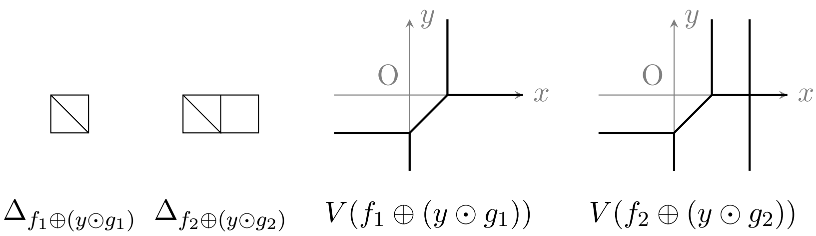

図 2: トロピカル有理関数の二つの表示.

3　主定理

一変数トロピカル有理関数 $\varphi(x)$ に対して、単項式複雑度と分解複雑度を共に最小にするような表示 $\varphi(x) = f(x) \oslash g(x)$ がただ一つ存在することが [5] において示された。これと同様、$n = 1$ のときには、$\varphi(x) \neq -\infty$ を $f(x) \oslash g(x)$ と表せるような組 (f,g) の中で体積最小なものが一意に存在することを明らかにした。

Theorem 3.1. $\mathbb{R}$ 上の $-\infty$ でない任意のトロピカル有理関数 $\varphi(x) \neq -\infty$ に対して、最小体積表示 $\varphi(x) = f(x) \oslash g(x)$ が存在する。$f'(x)$ と $g'(x)$ が $\varphi(x) = f'(x) \oslash g'(x)$, $\mathrm{vol}(f', g') = \mathrm{vol}(f, g)$ を満たすならば、$f' \oplus (y \odot g')$ の双対分割は $f \oplus (y \odot g)$ の双対分割を平行移動したものである。

一方、$n > 1$ のとき、最小体積表示が一意に定まらないような例があることを示した。

Proposition 3.2. $\mathbb{R}^2$ 上のトロピカル有理関数であって、ちょうど二つの異なる最小体積表示を持つものが存在する。

4　証明の準備（トロピカル平面曲線の和と差の導入）

Lemma 4.1. *[1, Lemma 4.6]* トロピカル多項式 $f, g \in \mathbb{T}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ に対して

$$V(f \odot g) = V(f) \cup V(g)$$

が成り立つ。

Remark 4.2. 上の等式の右辺を重みも含めた和と見ると、重みも込めて等号が成立する。

Definition 4.3. トロピカル平面曲線 Γ は空でない $V(f)$, $V(g)$（f, g はトロピカル多項式）により $\Gamma = V(f) \cup V(g)$ と表すことができないとき、既約であるという。

Notation 4.4. $A, B \subset \mathbb{R}^n$ のミンコフスキー和を $A + B$ と書く。

Definition 4.5. f を二変数トロピカル多項式とする。f のニュートン多角形が一点集合ではなく、もしトロピカル多項式 f, g を用いて $\mathrm{Newt}(f) = \mathrm{Newt}(g) + \mathrm{Newt}(h)$ と書けているなら $\mathrm{Newt}(g)$ または $\mathrm{Newt}(h)$ が一点集合であるとき、既約であるという。

二つ目の主結果の証明で次の Lemma を使う。これは $\mathrm{Newt}(f \odot g) = \mathrm{Newt}(f) + \mathrm{Newt}(g)$ から簡単にわかる。

Lemma 4.6. $V(f)$ を $f = \bigoplus_{i,j} 0x^iy^j$（係数はすべて 0 であることに注意）から定まるトロピカル平面曲線とする。$V(f)$ が既約であることと $\mathrm{Newt}(f)$ が既約であることは同値である。

トロピカル有理関数は二つのトロピカル多項式関数をトロピカルな意味で割り算することで得られる。これは通常の実数の世界での引き算に対応している。Lemma 4.1 より、トロピカル多項式 f, g のトロピカル積 $f \odot g$ の定めるトロピカル平面曲線は、トロピカル平面曲線 $V(f)$, $V(g)$ の和とみなせるから、トロピカル有理関数から二つのトロピカル平面曲線の差を考えることは自然である。トロピカル平面曲線の和と差（特に差）を考えるために、次のように Div を定義した。

Definition 4.7. $\mathrm{Div}^+ := \{L \subset \mathbb{R}^2 \mid L$ は直線、半直線または線分$\}$,

$$\mathrm{Div}^\# := \left\{ \sum_{L \in \mathrm{Div}^+} w_L L \quad (\text{formal sum}) \;\middle|\; \begin{array}{l} w_L \in \mathbb{Z}, \\ \#\{L \in \mathrm{Div}^+ \mid w_L \neq 0\} < \infty \end{array} \right\}$$

と定義する。二つの元 $\sum_{L \in \mathrm{Div}^+} w_L L \in \mathrm{Div}^\#$ と $\sum_{L \in \mathrm{Div}^+} w'_L L \in \mathrm{Div}^\#$ の和 $\sum_{L \in \mathrm{Div}^+} w_L L + \sum_{L \in \mathrm{Div}^+} w'_L L$ を $\sum_{L \in \mathrm{Div}^+} (w_L + w'_L) L$ と定める。$L_1, L_2 \in \mathrm{Div}^+$ であって、$\#(L_1 \cap L_2) = 1$ と $\exists L_3 \in \mathrm{Div}^+$ s.t. $L_1 \cup L_2 = L_3$ を満たすものと、各整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対して、$\sum_{L \in \mathrm{Div}^+} w_L L$ と $\sum_{L \in \mathrm{Div}^+ \setminus \{L_1, L_2, L_3\}} w_L L + (w_{L_1} - n)L_1 + (w_{L_2} - n)L_2 + (w_{L_3} + n)L_3$ を同一視する。上の同一視により、$\mathrm{Div}^\#$ 上の同値関係が定まる。この同値関係による商を Div と書く。Div 上の和を $\mathrm{Div}^\#$ における和から誘導されるものとして定める。

Remark 4.8. トロピカル平面曲線は重み付きの辺の和とみなせるので、Div の元とみなせる。

Notation 4.9. トロピカル平面曲線 Γ の各辺の重みを -1 倍することで得られる Div の元を $-\Gamma$ と書く。

Notation 4.10. Γ_1, Γ_2 をトロピカル平面曲線としたとき、Γ_1 と $-\Gamma_2$ の和により定まる Div の元を $\Gamma_1 \oslash \Gamma_2$ と書く。

5 主定理の証明

Lemma 5.1. $f(x), g(x) \in \mathbb{T}[x^{\pm 1}]$ が関数として $f = g$ であるならば、これらの双対分割は等しい。

Proof. トロピカル有理関数 $f(x) \oslash 0$, $g(x) \oslash 0$ は関数として等しい。特に、$f(x) \oslash 0$, $g(x) \oslash 0$ のグラフは等しい。トロピカル有理関数に関する双対定理により、$\Delta_{f(x)\oplus y} = \Delta_{g(x)\oplus y}$ がわかる。よって、$\Delta_f = \Delta_g$ である。 $\square$

一つ目の主定理を証明する。

Theorem 5.2. $\mathbb{R}$ 上の $-\infty$ でない任意のトロピカル有理関数 $\varphi(x) \neq -\infty$ に対して、最小体積表示 $\varphi(x) = f(x) \oslash g(x)$ が存在する。$f'(x)$ と $g'(x)$ が $\varphi(x) = f'(x) \oslash g'(x)$, $\mathrm{vol}(f', g') = \mathrm{vol}(f, g)$ を満たすならば、$f' \oplus (y \odot g')$ の双対分割は $f \oplus (y \odot g)$ の双対分割を平行移動したものである。

Proof. Pick の定理から、有限個の格子点の Newton 多角形の面積は $1/2$ の倍数である。よって、$\varphi \neq -\infty$ に対して、ある $f, g \in \mathbb{T}[x^{\pm 1}] \setminus \{-\infty\}$ であって、$\varphi = f \oslash g$ を満たすものの中で体積最小のものがある。トロピカル代数における代数学の基本定理（[2, p.5]）により、関数 f, g は次のように線形関数のトロピカル積に一意に書き表すことができる：

$$
\begin{aligned}
f &= \alpha_1 x^{i_0}(x \oplus a_1)^{i_1} \odot \cdots \odot (x \oplus a_n)^{i_n}, \\
g &= \alpha_2 x^{j_0}(x \oplus b_1)^{j_1} \odot \cdots \odot (x \oplus b_m)^{j_m}.
\end{aligned}
$$

ただし、$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $i_0, j_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$, $i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_m \in \mathbb{Z}_{>0}$ である。Lemma 5.1 と Pick の定理により、

$$
\mathrm{vol}(f, g) = \frac{\sum_{s=1}^{n} i_s + 1 + \sum_{s=1}^{m} j_s + 1}{2} - 1
$$

となることに注意する。また、実数 $a \in \mathbb{R}$ とトロピカル多項式 $h(x)$, $h'(x)$ に対して、$h \oslash h' = (h \odot (x \oplus a)) \oslash (h' \odot (x \oplus a))$ となることにも注意する。$\mathrm{vol}(f, g)$ が最小体積であることと組み合わせると、$\{a_1, \ldots, a_n\} \cap \{b_1, \ldots, b_m\} = \emptyset$ がわかる。

$f'(x)$, $g'(x)$ が $\varphi(x) = f'(x) \oslash g'(x)$ と $\mathrm{vol}(f', g') = \mathrm{vol}(f, g)$ を満たすと仮定する。このとき、関数 f', g' は次のように線形関数のトロピカル積に一意に書き表すことができる：

$$
\begin{aligned}
f' &= \alpha_3 x^{k_0}(x \oplus c_1)^{k_1} \odot \cdots \odot (x \oplus c_u)^{k_u}, \\
g' &= \alpha_4 x^{l_0}(x \oplus d_1)^{l_1} \odot \cdots \odot (x \oplus d_v)^{l_v}.
\end{aligned}
$$

ただし、$\alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$, $k_0, l_0 \in \mathbb{Z}$, $c_1, \ldots, c_u, d_1, \ldots, d_v \in \mathbb{R}$, $k_1, \ldots, k_u, l_1, \ldots, l_v \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\{c_1, \ldots, c_u\} \cap \{d_1, \ldots, d_v\} = \emptyset$ である。関数として $f \oslash g = f' \oslash g'$ であるから、関数 $f \odot g'$ と $f' \odot g$ は等しい。したがって、関数 $(\alpha_1 \odot \alpha_4)x^{i_0 + l_0}(x \oplus a_1)^{i_1} \odot \cdots \odot (x \oplus a_n)^{i_n} \odot (x \oplus d_1)^{l_1} \odot \cdots \odot (x \oplus d_v)^{l_v}$ と $(\alpha_3 \odot \alpha_2)x^{k_0 + j_0}(x \oplus c_1)^{k_1} \odot \cdots \odot (x \oplus c_u)^{k_u} \odot (x \oplus b_1)^{j_1} \odot \cdots \odot (x \oplus b_m)^{j_m}$ は等しい。これらの線形関数のトロピカル積としての表示は一意である。$\{a_1, \ldots, a_n\} \cap \{b_1, \ldots, b_m\} = \emptyset$ かつ $\{c_1, \ldots, c_u\} \cap \{d_1, \ldots, d_v\} = \emptyset$ であることと組み合わせると、添え字の付け替えにより、$\alpha_1 - \alpha_3 = \alpha_2 - \alpha_4$, $i_0 - k_0 = j_0 - l_0$, $n = u$, $a_s = c_s$ $(1 \leq s \leq n)$, $m = v$, $b_t = d_t$ $(1 \leq t \leq m)$ が成り立つ。Lemma 5.1 と組み合わせることで、$\Delta_f^{\uparrow}$ (resp. $\Delta_g^{\uparrow}$) は $\Delta_{f'}^{\uparrow}$ (resp. $\Delta_{g'}^{\uparrow}$) をベクトル $(i_0 - k_0, \alpha_1 - \alpha_3) \in \mathbb{R}^2$ だけ平行移動したものとなり、したがって、$\Delta_{f \oplus (y \odot g)}^{\uparrow}$ は $\Delta_{f' \oplus (y \odot g')}^{\uparrow}$ をベクトル $(i_0 - k_0, 0, \alpha_1 - \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ だけ平行移動したものになる。よって、$\Delta_{f \oplus (y \odot g)}$ は $\Delta_{f' \oplus (y \odot g')}$ をベクトル $(i_0 - k_0, 0)$ だけ平行移動したものである。 $\square$

次に二つ目の結果の証明に入る。具体的な計算により、次の二つの Lemma を得る。

Lemma 5.3. Δ_1 を三点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ の凸包、Δ_2 を三点 $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ の凸包、Δ を有限個の格子点の凸包とする。Δ は一点集合ではないとする。Δ が次のいずれかであるとき、$i=1,2$ に対して、Δ_i と Δ のミンコフスキー和 $\Delta_i+\Delta$ の面積は $3/2$ となる：

$$\mathrm{Conv}\{(0,0),(1,0)\},\ \mathrm{Conv}\{(0,0),(0,1)\},\ \mathrm{Conv}\{(1,0),(0,1)\},$$

また、Δ が Δ_i を平行移動したものであれば 2 となり、それ以外の場合は $5/2$ 以上になる。

Lemma 5.4. Δ_1 を三点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ の凸包、Δ_2 を三点 $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ の凸包、Δ を有限個の格子点の凸包とする。$\Delta_1+\Delta$ の面積と $\Delta_2+\Delta$ の面積はともに 2 以上とする。このとき、$\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in\Delta_1+\Delta\}\cup\{(x,y,1)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in\Delta_2+\Delta\}$ の凸包の体積は $11/6$ 以上となる。

最後に二つ目の主定理とその証明を述べる。上の二つの Lemma を使った具体的な計算による証明である。

Proposition 5.5. $\mathbb{R}^2$ 上のトロピカル有理関数であって、ちょうど二つの異なる最小体積表示を持つものが存在する。

Proof. $f_1 = xy\oplus(-1)y^2\oplus x\oplus y\oplus 0$, $g_1=(-1)xy^2\oplus xy\oplus(-1)y^2\oplus x\oplus y$ とする。このとき、トロピカル曲線と $V(f_1)\oslash V(g_1)\in\mathrm{Div}$ は図 3 のようになる。$V(f_1)\oslash V(g_1)$ の太線部の半直線たちが重み 1、破線部が重み -1 である。一方、トロピカル多項式 $f_2=x^2\oplus xy\oplus(-1)y^2\oplus x\oplus(-1)y$, $g_2=(-1)x^2y\oplus(-1)xy^2\oplus x^2\oplus xy\oplus(-1)y^2$ も関数として $f_1\oslash g_1 = f_2\oslash g_2$ を満たす。ここで、$V(f_1)\oslash V(g_1)$ と $V(f_2)\oslash V(g_2)$ は三本の半直線 $R_1:=\{(t,t+1)\mid t\geq 0\}$, $R_2:=\{(0,-t)\mid t\geq 0\}$, $R_3:=\{(-t,0)\mid t\geq 0\}$ を重み 1 で含むことに注意する。また、体積を計算すると $\mathrm{vol}(f_1,g_1)=\mathrm{vol}(f_2,g_2)=5/3$ となっている。

トロピカル多項式の組 (f,g) が関数として $f\oslash g = f_1\oslash g_1$ を満たすとしてみよう。すると、$V(f)$ は三本の半直線 R_1, R_2, R_3 を含まなければならない。ここで、十分大きな $d\in\mathbb{R}_{>0}$ をとると、$V(f)\setminus U_d$ は有限個の半直線 $L_1,\dots,L_n$ の非交和となる。L_1 は R_1 と、L_2 は R_2 と、そして L_3 は R_3 と非有界な交わりを持つとしてよい。もし $n=3$ であれば、$\mathrm{Newt}(f)$ は $\Delta_1:=\mathrm{Conv}\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ を平行移動したものになり、したがって $V(f)$ は $V(x\oplus y\oplus 0)$ を平行移動したものとなる。しかし、これは $R_1\cup R_2\cup R_3$ を含まない。よって、$n\geq 4$ となる。

半直線 $L_1,\dots,L_n$ たちはバランス条件を満たす。三本の半直線 L_1, L_2, L_3 はバランス条件を満たしているから、残りの $L_4,\dots,L_n$ たちもバランス条件を満たさなければならない。このとき、Lemma 4.6 より $\mathrm{Newt}(f)$ は Δ_1 と凸格子多角形であって一点ではないもの Δ とのミンコフスキー和として表すことができる。同様に、$\mathrm{Newt}(g)$ は $\mathrm{Conv}\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ と Δ のミンコフスキー和を平行移動させたものとして表せる。

図 5 のように、$\Delta':=\mathrm{Conv}\{(0,0),(2,0),(1,1),(0,1)\}$ はちょうど八種類の分割が可能である。これらの双対になるトロピカル平面曲線はいずれも三つの半直線 R_1, R_2, R_3 を同時に含むことはなく、したがって、$\mathrm{Newt}(f)$ は Δ' を平行移動させたものではないことがわかる。よって、Δ は $\mathrm{Conv}\{(0,0),(1,0)\}$ を平行移動させたものではない。もし Δ が $\mathrm{Conv}\{(0,0),(1,1)\}$ を平行移動させたものであれば、$\mathrm{Newt}(f)$ と $\mathrm{Newt}(g)$ の面積はともに $5/2$ となる。もし Δ が二次元集合であれば、Lemma 5.3 により $\mathrm{Newt}(f)$ と $\mathrm{Newt}(g)$ の面積はともに 2 以上となる。いずれの場合も Lemma 5.4 により $\mathrm{vol}(f,g)\geq 11/6 > 5/3$ となる。したがって、$\varphi = f_1\oslash g_1$ と $\varphi = f_2\oslash g_2$ のちょうど二つだけが φ の最小体積表示である。 $\square$

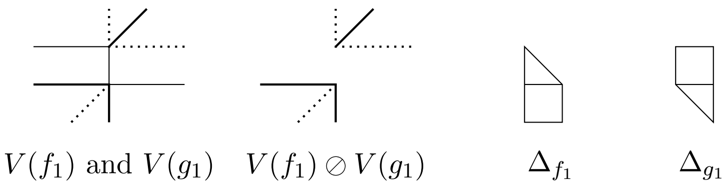

図 3: トロピカル平面曲線 $V(f_1)$ と $V(g_1)$.

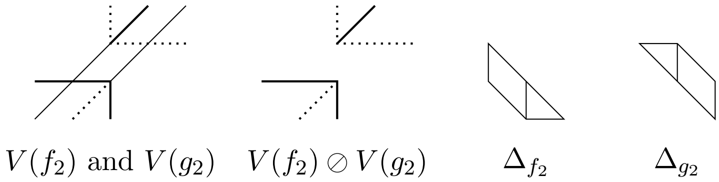

図 4: トロピカル平面曲線 $V(f_2)$ と $V(g_2)$.

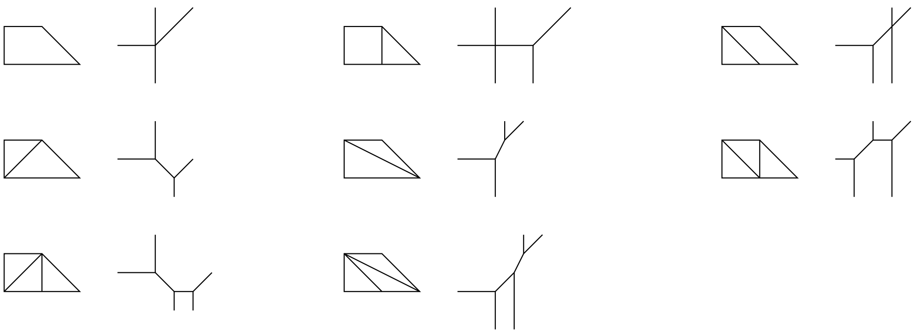

図 5: Δ' の八つの分割と双対トロピカル曲線の概形.

参考文献

[1] Joswig, M., "Essentials of tropical combinatorics," Graduate Studies in Mathmatics **219**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2021.

[2] Maclagan, D. and Sturmfels, B., "Introduction to Tropical Geometry," Graduate Studies in Mathematics **161**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[3] Mikhalkin, G., *Enumerative tropical algebraic geometry in* $\mathbb{R}^2$, J. Amer. Math. Soc. **18** (2005), no. 2, 313–377.

[4] Sukenaga, M., *Minimum volumes of tropical rational functions*, (プレプリント), arXiv:2409.18348 (2024).

[5] Tran, M. and Wang, J, *Minimal representations of tropical rational functions*, Algebr. Stat. **15** (2024), no. 1, 27–59.